“子墨课堂”精品课程

——点、直线、平面之间的位置关系知识总结及能力提升习题含解析

主讲人：杜永堂

《空间中点、直线、平面之间的位置关系》知识点总结

1.内容归纳总结

（1）**四个公理**

公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内。

符号语言：$A\in l, B\in l$, 且$A\in\alpha, B\in\alpha\Rightarrow l\in\alpha$。

公理 2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。

三个推论：① 经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面

② 经过两条相交直线，有且只有一个平面

③ 经过两条平行直线，有且只有一个平面

它给出了确定一个平面的依据。

公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线（两个平面的交线）。

符号语言：$P\in\alpha$, 且$P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l, P\in l$。

公理 4：（平行线的传递性）平行与同一直线的两条直线互相平行。

符号语言：$a//l$, 且$b//l\Rightarrow a//b$。

（2）**空间中直线与直线之间的位置关系**

1.概念 异面直线及夹角：把不在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线。

已知两条异面直线a,b，经过空间任意一点 O 作直线$a'//a, b'//b$，我们把a'与b'所成的角（或直角）叫异面直线a,b所成的夹角。（易知：夹角范围$0<\theta\le 90^\circ$）

定理：空间中如果一个角的两边分别与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补。（注意：会画两个角互补的图形）

2.位置关系：$\begin{cases}共面直线\begin{cases}相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点; \\ 平行直线：同一平面内，没有公共点;\end{cases} \\ 异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点\end{cases}$

（3）**空间中直线与平面之间的位置关系**

直线与平面的位置关系有三种：

$\begin{cases}直线在平面内（l\subset\alpha）有无数个公共点 \\ 直线在平面外\begin{cases}直线与平面相交（l\bigcap\alpha=A）有且只有一个公共点 \\ 直线与平面平行（l//\alpha）没有公共点\end{cases}\end{cases}$

（4）**空间中平面与平面之间的位置关系**

平面与平面之间的位置关系有两种：$\begin{cases}两个平面平行（\alpha//\beta）没有公共点 \\ 两个平面相交（\alpha\bigcap\beta=l）有一条公共直线\end{cases}$

直线、平面平行的判定及其性质

1.内容归纳总结

（1）四个定理

定理	定理内容	符号表示	分析解决问题的常用方法
直线与平面平行的判定	平面外的一条直线与平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行	$a\not\subset\alpha,b\subset\alpha$,且$a//b$ $\Rightarrow a//\alpha$	在已知平面内“找出”一条直线与已知直线平行就可以判定直线与平面平行。即将“空间问题”转化为“平面问题”
平面与平面平行的判定	一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行	$a\subset\beta,b\subset\beta,$ $a\bigcap b=P,a//\alpha,b//\alpha$ $\Rightarrow\beta//\alpha$	判定的关键：在一个已知平面内“找出”两条相交直线与另一平面平行。即将“面面平行问题”转化为“线面平行问题”
直线与平面平行的性质	一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行	$a//\alpha,a\subset\beta,\alpha\bigcap\beta=b$ $\Rightarrow a//b$	
平面与平面平行的性质	如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它	$\alpha//\beta,\alpha\bigcap\gamma=a,$ $\beta\bigcap\gamma=b\Rightarrow a//b$	

	们的交线平行		

直线、平面平垂直的判定及其性质

1.内容归纳总结

（一）基本概念

1.直线与平面垂直：如果直线l与平面α内的任意一条直线都垂直，我们就说直线l与平面α垂直，记作$l \perp \alpha$。直线l叫做平面α的垂线，平面α叫做直线l的垂面。直线与平面的公共点P叫做垂足。

2. 直线与平面所成的角：

角的取值范围：$0 < \theta < 90°$。

3.二面角：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角。这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面。二面角的记法： 二面角的取值范围：$0 < \theta < 180°$ ； 两个平面垂直：直二面角。

（二）四个定理

定理	定理内容	符号表示	分析解决问题的常用方法
直线与平面垂直的判定	一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直。	m、$n \in \alpha, m \cap n = P$, 且$a \perp m, a \perp n$ $\Rightarrow a \perp \alpha$	在已知平面内“找出”两条相交直线与已知直线垂直就可以判定直线与平面垂直。即将“线面垂直”转化为“线线垂直”
平面与平面垂直的判定	一个平面过另一平面的垂线，则这两个平面垂直。	$a \subset \beta, a \perp \alpha \Rightarrow \beta \perp \alpha$ （满足条件与α垂直的平面β有无数个）	判定的关键：在一个已知平面内“找出”两条相交直线与另一平面平行。即将“面面平行问题”转化为“线面平行问题”
直线与平面垂直的性质	同垂直与一个平面的两条直线平行。	$a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a // b$	
平面与平面垂直的性质	两个平面垂直，则一个平面内垂直与交线的直线与另一个平面垂直。	$\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, a \subset \beta$, $a \perp l \Rightarrow a \perp \alpha$	解决问题时，常添加的辅助线是在一个平面内作两平面交线的垂线

"子墨课堂"例题讲解

一、空间点、直线、平面之间的位置关系

1.空间中的直线与直线的位置关系

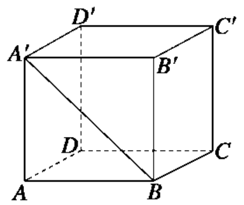
【教材原题】课本 47 页例题 3

例 3　如右图，已知正方体 $ABCD—A'B'C'D'$.

(1)哪些棱所在直线与直线 BA'是异面直线？

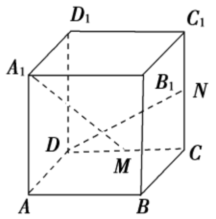
(2)直线 BA'和 CC'的夹角是多少？

(3)哪些棱所在的直线与直线 AA'垂直？



【高考题或模拟题】

(2012 四川高考)如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是棱 CD、CC_1 的中点，则异面直线 A_1M 与 DN 所成的角的大小是________.



(2012·大纲全国卷)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F分别为 BB_1、CC_1 的中点，那么异面直线 AE与 D_1F所成角的余弦值为________ .

2.空间中点、直线与平面之间的位置关系

【教材原题】课本 49 页例题 4

例 4　下列命题中正确的个数是　　　(　　)

①若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l/\!/\alpha$;

②若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都平行；

③如果两条平行直线中的一条与一个平面平行，那么另一条也与这个平面

平行；

④若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【高考题或模拟题】

(2011 浙江卷)若直线 l 不平行于平面 α，且 $l\not\subset\alpha$，则(　　)

A．α 内的所有直线与 l 异面　　B．α 内不存在与 l 平行的直线

C．α 内存在唯一的直线与 l 平行　　D．α 内的直线与 l 都相交

(2012 四川高考)下列命题正确的是(　　)

A．若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线平行

B．若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行

C．若一条直线平行于两个相交平面，则这条直线与这两个平面的交线平行

D．若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面平行

(2013·郑州模拟)l_1，l_2，l_3 是空间三条不同的直线，则下列命题正确的是(　　)

A．$l_1\perp l_2$，$l_2\perp l_3$，则 $l_1\perp l_3$

B．$l_1\perp l_2$，$l_2\parallel l_3$，则 $l_1\perp l_3$

C．$l_1\parallel l_2\parallel l_3$，则 l_1，l_2，l_3 共面

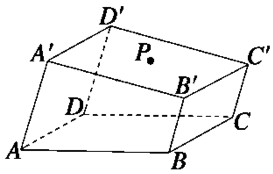
D．l_1，l_2，l_3 共点，则 l_1，l_2，l_3 共面

二、直线、平面平行的判断及其性质

1、直线与平面平行的判定与性质

【教材原题】课本 59 页习例题 3

例 3 如图所示的一块木料中，棱 BC 平行于面 $A'C'$.

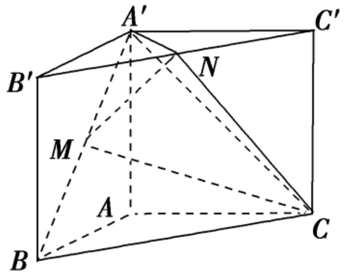


(1)要经过面 $A'C'$内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线？

(2)所画的线与平面 AC 是什么位置关系？

【高考题或模拟题】

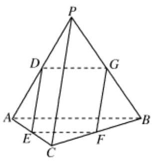
(2012 辽宁高考)如图，直三棱柱 $ABC-A'B'C'$，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=\sqrt{2}$，$AA'=1$，点 M，N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$的中点.



(1)证明：MN∥平面 $A'ACC'$；

(2)求三棱锥 $A'-MNC$ 的体积.(锥体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为底面面积，h 为高)

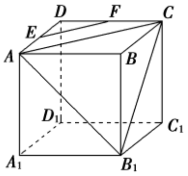
(2011 北京卷)如图，在四面体 $PABC$ 中，$PC\perp AB$，$PA\perp BC$，点 D，E，F，G 分别是棱 AP，AC，BC，PB 的中点.



(1)求证：DE∥平面 BCP；

(2)求证：四边形 $DEFG$ 为矩形.

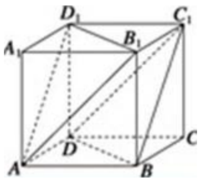
(2013 福州模拟)如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，点 E 为 AD 的中点，点 F 在 CD 上．若 EF∥平面 AB_1C，则线段 EF 的长度等于________.



2.平面与平面平行的判定与性质

【教材原题】课本 57 页例题 2

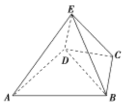
例 2　已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，求证：平面 AB_1D_1∥平面 C_1BD.



小结：证明两个平面平行的一般步骤为：第一步：在一个平面内找出两条相交直线；第二步：证明两条相交直线分别平行于另一个平面；第三步：利用判定定理得出结论．

【高考题或模拟题】

(2012 山东高考)如图 7－4－8，几何体 $E－ABCD$ 是四棱锥，△ABD 为正三角形，$CB=CD$，$EC\perp BD$.



(1)求证：$BE=DE$；

(2)若∠$BCD=120°$，M 为线段 AE 的中点，求证：DM∥平面 BEC.

三、直线、平面垂直的判定及其性质

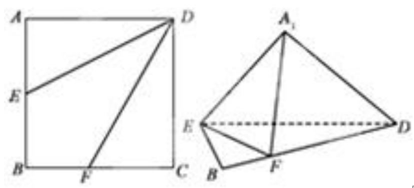
1、直线与平面垂直的判定与性质

【教材原题】课本 79 页复习参考题 B 组 1 题

如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，

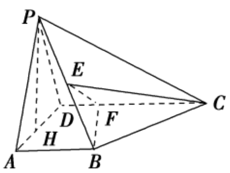
（1）点 E 是 AB 的中点，点 F 是 BC 的中点，将$\triangle AED, \triangle DCF$ 分别沿 DE，DF 折起，使 A，C 两点重合与 A'，求证：$A'D \perp EF$.

(2)当 $BE = BF = \dfrac{1}{4}BC$ 时，求三棱锥 $A' - EFD$ 体积.



【高考题或模拟题】

(2012 广东高考)如图所示，在四棱锥 $P－ABCD$ 中，$AB\perp$平面 PAD，$AB /\!/ CD$，$PD＝AD$，E 是 PB 的中点，F 是 DC 上的点且 $DF＝\dfrac{1}{2}AB$，PH 为$\triangle PAD$ 中 AD 边上的高.



(1)证明：$PH\perp$平面 $ABCD$；

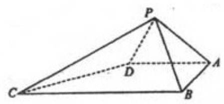
(2)若 $PH＝1$，$AD＝\sqrt{2}$，$FC＝1$，求三棱锥 $E－BCF$ 的体积；

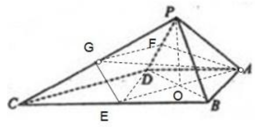
(3)证明：$EF\perp$平面 PAB.

(2013·高考全国大纲卷理)如图，四棱锥$P-ABCD$中，

$\angle ABC=\angle BAD=90^{\circ}$，$BC=2AD,\Delta PAB$与$\Delta PAD$都是等边三角形.

（1）证明：$PB\perp CD$;



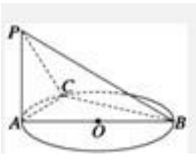


（2）求二面角$A-PD-C$的大小.

2.面面垂直的判定与性质

【教材原题】课本 69 页例题 3

例 3　如图，*AB* 是⊙*O* 的直径，*PA* 垂直于⊙*O* 所在的平面，*C* 是圆周上不同于 *A*、*B* 的任意一点，求证：平面 *PAC*⊥平面 *PBC*.



【高考题或模拟题】

(2012·浙江高考)设 l是直线，α，β是两个不同的平面(　　)

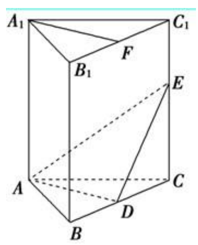
A．若 $l/\!/\alpha$，$l/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$　　B．若 $l/\!/\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C．若 $\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则 $l\perp\beta$　　D．若 $\alpha\perp\beta$，$l/\!/\alpha$，则 $l\perp\beta$

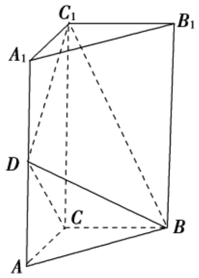
(2012年高考江苏卷)如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=A_1C_1$，D，E 分别是棱 BC，CC_1 上的点(点 D 不同于点 C)，且 $AD\perp DE$，F 为 B_1C_1 的中点．

求证：(1)平面 $ADE\perp$ 平面 BCC_1B_1；

(2)直线 $A_1F\parallel$ 平面 ADE.



(2012 **课标全国卷**)如图 7－5－3，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱垂直底面，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点.



(1)证明：平面 $BDC_1\perp$平面 BDC；

(2)平面 BDC_1 分此棱柱为两部分，求这两部分体积的比．

点、直线、平面之间的位置关系参考答案

一、空间点、直线、平面之间的位置关系

1.空间中的直线与直线的位置关系

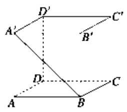
【教材原题】课本 47 页例题 3

例 3　如右图，已知正方体 $ABCD—A'B'C'D'$.

(1)哪些棱所在直线与直线 BA'是异面直线？

(2)直线 BA'和 CC'的夹角是多少？

(3)哪些棱所在的直线与直线 AA'垂直？



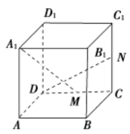
解：(1)由异面直线的定义可知，棱 AD、DC、CC'、DD'、$D'C'$、$B'C'$所在直线分别与直线 BA'是异面直线．

(2)由 $BB' \parallel CC'$可知，$\angle B'BA'$为异面直线 BA'与 CC'的夹角，$\angle B'BA' = 45°$，所以直线 BA'和 CC'的夹角为 $45°$.

(3)直线 AB、BC、CD、DA、$A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$分别与直线 AA'垂直．

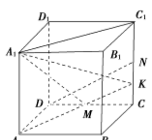
【高考题或模拟题】

(2012 四川高考)如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是棱 CD、CC_1 的中点，则异面直线 A_1M 与 DN 所成的角的大小是________.



【答案】　90°

【解析】如图，取 CN 的中点 K，连接 MK，则 MK 为△CDN 的中位线，所以 $MK \parallel DN$.



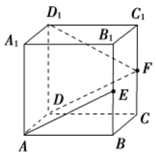
所以$\angle A_1MK$ 为异面直线 A_1M 与 DN 所成的角．连接 A_1C_1，AM.设正方体棱

长为 4，则 $A_1K=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{41}$，$MK=\frac{1}{2}DN=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{5}$，$A_1M=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$，$\therefore A_1M^2+MK^2=A_1K^2$，$\therefore \angle A_1MK=90°$.

(2012·大纲全国卷)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F分别为 BB_1、CC_1 的中点，那么异面直线 AE与 D_1F所成角的余弦值为________．

【解析】 连接 DF，则 $AE\parallel DF$，

$\therefore \angle D_1FD$ 即为异面直线 AE 与 D_1F 所成的角．



设正方体棱长为 a，则 $D_1D=a$，$DF=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，$D_1F=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

$$\therefore \cos\angle D_1FD=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{3}{5}.$$

【答案】 $\frac{3}{5}$

对比分析：

1.考查知识点：课本题、2012 四川高考、2012 大纲全国卷共同考查的知识点是空间中的直线与直线的位置关系；课本题考查异面直线的判定、异面直线所成角、线线平行与线线垂直的判断与应用；2012 四川高考、2012 大纲全国卷考查异面直线所成角的判断与求解．

2．考查的方式：课本题是解答题；2012 四川高考、2012 大纲全国卷是填空题．

3．命题的思路：课本题、2012 四川高考、2012 大纲全国卷共同通过考查空间中的直线与直线的位置关系，考查学空间想象能力，考查学生对线线角的

掌握程度.

4．进一步挖掘的价值：高考对空间中的直线与直线的位置关系的考查，主要考查线线平行判定与性质、线线垂直的判断与性质、异面直线所成的角，多方在几何体中考查，考查的方式多为选择题、填空题，有时也在大题中与其它知识结合考查．

2.空间中点、直线与平面之间的位置关系

【教材原题】课本 49 页例题 4

例 4　下列命题中正确的个数是　　(　　)

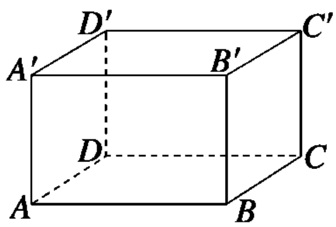
①若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l\parallel\alpha$；

②若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都平行；

③如果两条平行直线中的一条与一个平面平行，那么另一条也与这个平面平行；

④若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3



【解析】如右图借助长方体模型来看命题是否正确．命题①不正确，相交时也符合；

命题②不正确，如右图中，$A'B$ 与平面 $DCC'D'$ 平行，但它与 CD 不平行；

命题③不正确，另一条直线有可能在平面内，如 $AB\parallel CD$，AB 与平面 $DCC'D'$ 平行，但直线 CD 在平面 $DCC'D'$ 内；

命题④正确，l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 无公共点，l 与平面 α 内所有直线都没有公共点．

【高考题或模拟题】

(2011 浙江卷)若直线 l 不平行于平面 α，且 $l\not\subset\alpha$，则(　　)

A．α 内的所有直线与 l 异面

B．α 内不存在与 l 平行的直线

C．α 内存在唯一的直线与 l 平行

D．α 内的直线与 l 都相交

【答案】B

【解析】B　由题意知，直线 l 与平面 α 相交，则直线 l 与平面 α 内的直线只有相交和异面两种位置关系，因而只有选项 B 是正确的．

(2012 四川高考)下列命题正确的是(　　)

A．若两条直线和同一个平面所成的角相等，则这两条直线平行

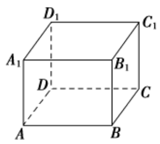
B．若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行

C．若一条直线平行于两个相交平面，则这条直线与这两个平面的交线平行

D．若两个平面都垂直于第三个平面，则这两个平面平行

【答案】　C

【解析】　如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1D 与 D_1A 和平面 $ABCD$ 所成的角都是 45°，但 A_1D 与 D_1A 不平行，故 A 错；在平面 ABB_1A_1 内，直线 A_1B_1 上有无数个点到平面 $ABCD$ 的距离相等，但平面 ABB_1A_1 与平面 $ABCD$ 不平行，故 B 错；平面 ADD_1A_1 与平面 DCC_1D_1 和平面 $ABCD$ 都垂直，但两个平面相交，故 D 错，从而 C 正确．



(2013·郑州模拟)l_1，l_2，l_3 是空间三条不同的直线，则下列命题正确的是(　　)

A．$l_1\perp l_2$，$l_2\perp l_3$，则 $l_1\perp l_3$

B．$l_1\perp l_2$，$l_2\parallel l_3$，则 $l_1\perp l_3$

C．$l_1\parallel l_2\parallel l_3$，则 l_1，l_2，l_3 共面

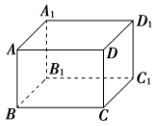
D．l_1，l_2，l_3共点，则l_1，l_2，l_3共面

【解析】排除法，如图长方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，

$AB\perp AD$，$CD\perp AD$，但有$AB\parallel CD$，因此A不正确；

又$AB\parallel DC\parallel A_1B_1$，但三线不共面，因此C不正确；

又从A出发的三条棱不共面，所以D不正确；因此B正确，且由线线平行和垂直的定义易知B正确．



【答案】 B

对比分析：

1.考查知识点：课本题、2011浙江卷、2012四川高考、2013郑州模拟共同考查的知识点是空间中点、直线与平面之间的位置关系；课本题考查空间中直线与平面的位置关系；2011浙江卷考查平面外直线与平面内直线之间的位置关系；2013郑州模拟考查线与线位置关系．

2．考查的方式：课本题、2011浙江卷、2012四川高考、2013郑州模拟都是选择题．

3．命题的思路：课本题、2011浙江卷、2012四川高考、2013郑州模拟通过考查空间中点、直线与平面之间的位置关系，考查学空间想象能力，考查学生认识空间点、线、面的位置关系的能力，考查学生准确判定线线平行、线线垂直、线面平行、线面垂直、面面平行、面面垂直的能力．

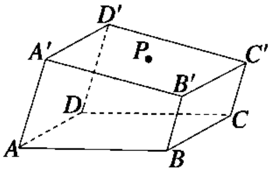
4．进一步挖掘的价值：空间点、直线、平面的位置关系是立体几何的理论基础，高考常设置选择题或填空题，考查直线、平面位置关系的判断和异面直

线所成的角的求法．在判断线、面位置关系时，有时可以借助常见的几何体做出判断.

二、直线、平面平行的判断及其性质

1、直线与平面平行的判定与性质

【教材原题】课本 59 页习例题 3



例 3 如图所示的一块木料中，棱 BC 平行于面 $A'C'$.

(1)要经过面 $A'C'$内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线？

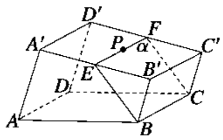
(2)所画的线与平面 AC 是什么位置关系？

解：(1)如图，在平面 $A'C'$内，过点 P 作直线 EF，使 EF∥$B'C'$，并分别交棱 $A'B'$，$C'D'$于点 E，F.连接 BE，CF.则 EF、BE、CF 就是应画的线.

(2)因为棱 BC 平行于平面 $A'C'$，平面 BC'与平面 $A'C'$交于 $B'C'$，所以 BC∥$B'C'$.

由(1)知，EF∥$B'C'$，所以 EF∥BC，

因此 $\left.\begin{array}{l} EF//BC \\ EF\not\in 平面AC \\ BC\in 平面AC \end{array}\right\}\Rightarrow EF//平面AC$.

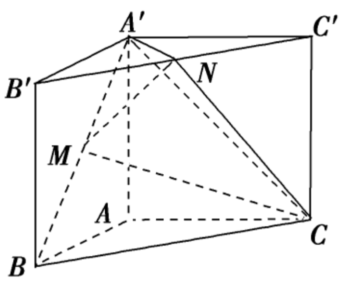


BE、CF显然都与平面 AC相交．

小结：平面外的一条直线只要和平面内的任一条直线平行，则就可以得到这条直线和这个平面平行；但是若一条直线与一个平面平行，则这条直线并不是和平面内的任意一条直线平行，它只与该平面内与它共面的直线平行.

【高考题或模拟题】

(2012 辽宁高考)如图，直三棱柱 $ABC-A'B'C'$，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=\sqrt{2}$，$AA'=1$，点 M，N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$的中点.

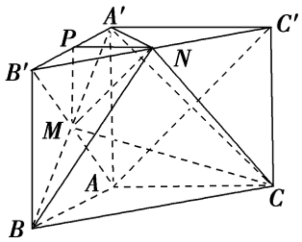


(1)证明：MN∥平面 $A'ACC'$；

(2)求三棱锥 $A'-MNC$ 的体积．(锥体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为底面面积，h 为高)

【分析】 (1)法一：证明 $MN\parallel AC'$；法二：取 $A'B'$的中点 P，证平面 $MPN\parallel$平面 $A'ACC'$.(2)转化法：根据 $S_{\triangle A'MC}=S_{\triangle BMC}$得 $V_{N—A'MC}=\frac{1}{2}V_{N—A'BC}$，从而 $V_{A'—MNC}=\frac{1}{2}V_{A'—NBC}$.

【解析】 (1)法一：连接 AB'，AC'，如图，由已知$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，三棱柱 $ABC—A'B'C'$为直三棱柱，



所以 M 为 AB'的中点．

又因为 N 为 $B'C'$的中点，所以 $MN\parallel AC'$.

又 $MN\not\in$平面 $A'ACC'$，$AC'\in$平面 $A'ACC'$，

所以 $MN\parallel$平面 $A'ACC'$.

法二：取 $A'B'$的中点 P，连接 MP，NP，AB'，如图，因为 M，N分别为 AB'与 $B'C'$的中点，

所以 $MP\parallel AA'$，$PN\parallel A'C'$.

所以 $MP\parallel$平面 $A'ACC'$，$PN\parallel$平面 $A'ACC'$.

又 $MP\cap NP=P$，

所以平面 $MPN\parallel$平面 $A'ACC'$.

而 $MN\in$ 平面 MPN，

所以 $MN /\!/$ 平面 $A'ACC'$.

(2)连接 BN，由题意知，$A'N\perp B'C'$，平面 $A'B'C'\cap$平面 $B'BCC'=B'C'$，

所以 $A'N\perp$平面 $B'BCC'$，即 $A'N\perp$平面 NBC，

故 $V_{A'—MNC}=V_{N—A'MC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A'MC}\times h$，

又 $S_{\triangle A'MC}=\frac{1}{2}S_{\triangle A'BC}$，所以 $V_{A'—MNC}=V_{N—A'MC}=\frac{1}{2}V_{N—A'BC}=\frac{1}{2}V_{A'—NBC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

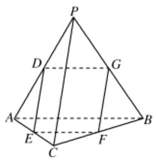
$\times S_{\triangle NBC}\times A'N$，

因为$\angle BAC=90°$，$BA=AC=\sqrt{2}$，所以 $BC=B'C'=2$，

$S_{\triangle NBC}=\frac{1}{2}BC\times BB'=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，$A'N=\frac{1}{2}B'C'=1$，

所以 $V_{A'—MNC}=V_{N—A'MC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle NBC}\times A'N=\frac{1}{6}$.

(2011 北京卷)如图，在四面体 $PABC$ 中，$PC\perp AB$，$PA\perp BC$，点 D，E，F，G 分别是棱 AP，AC，BC，PB 的中点.



(1)求证：$DE /\!/$ 平面 BCP；

(2)求证：四边形 $DEFG$ 为矩形.

证明：(1)因为 D，E 分别为 AP，AC 的中点，

所以 $DE /\!/ PC$.

又因为 $DE\notin$平面 BCP，$PC\in$平面 BCP

所以 $DE /\!/$ 平面 BCP.

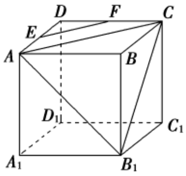
(2)因为 D，E，F，G 分别为 AP，AC，BC，PB 的中点，

所以 $DE // PC // FG$，$DG // AB // EF$.

所以四边形 $DEFG$ 为平行四边形．

又因为 $PC \perp AB$，所以 $DE \perp DG$.所以四边形 $DEFG$ 为矩形．

(2013 福州模拟)如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，点 E 为 AD 的中点，点 F 在 CD 上．若 $EF //$ 平面 AB_1C，则线段 EF 的长度等于________.



【解析】由于在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，∴$AC=2\sqrt{2}$.

又 E 为 AD 中点，$EF //$ 平面 AB_1C，$EF \in$ 平面 ADC，平面 $ADC \cap$ 平面 $AB_1C=AC$，

∴$EF // AC$，∴F 为 DC 中点，∴$EF=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$.

【答案】$\sqrt{2}$

对比分析：

1.考查知识点：课本题、2012 辽宁高考、2011 北京卷、2013 福州模拟共同考查的知识点是直线与平面平行的判定与性质；课本题考查线面平行的判断在实际问题中的应用；2012 辽宁高考考查线面平行的判定与性质以及几何体的体积，同时考查转化与划归思想；2011 北京卷考查线面平行、线线平行与线线垂直的判断；2013 福州模拟考查线面平行的性质应用．

2．考查的方式：课本题、2012 辽宁高考、2011 北京卷是解答题；2013 福州模拟是填空题．

3．命题的思路：课本题、2012 辽宁高考、2011 北京卷、2013 福州模拟通过考查直线与平面平行的判定与性质，考查学生证明问题能力、转化与划归能力、数形结合能力，同时考查学生对判断或证明线面平行的常用方法的掌握情

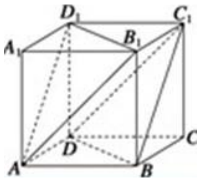
况.

4．进一步挖掘的价值：高考对空间中的平行的考查．多数仍以解答题形式出现，还会以常见的空间几何体为载体．主要考查线面平行判定与性质．

2.平面与平面平行的判定与性质

【教材原题】课本57页例题2

例2　已知正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$，求证：平面AB_1D_1∥平面C_1BD.



证明：因为$ABCD—A_1B_1C_1D_1$为正方体，

所以D_1C_1∥A_1B_1，$D_1C_1=A_1B_1$.

又AB∥A_1B_1，$AB=A_1B_1$，

所以D_1C_1∥AB，$D_1C_1=AB$，

所以D_1C_1BA是平行四边形，所以D_1A∥C_1B，

又$D_1A\notin$平面C_1BD，$C_1B\in$平面C_1BD，

由直线与平面平行的判定定理，.可知D_1A∥平面C_1BD，

同理D_1B_1∥平面C_1BD，

又$D_1A\cap D_1B_1=D_1$，所以，平面AB_1D_1∥平面C_1BD.

小结：证明两个平面平行的一般步骤为：第一步：在一个平面内找出两条相交直线；第二步：证明两条相交直线分别平行于另一个平面；第三步：利用判定定理得出结论.

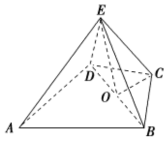
【高考题或模拟题】

(2012·山东高考)如图7－4－8，几何体$E－ABCD$是四棱锥，△ABD为正三角形，$CB=CD$，$EC\perp BD$.

(1)求证：$BE=DE$；

(2)若∠$BCD=120°$，M为线段AE的中点，求证：DM∥平面BEC.

【解析】 (1)如图(1)，取 BD 的中点 O，连接 CO，EO.



(1)由于 $CB=CD$，所以 $CO\perp BD$.

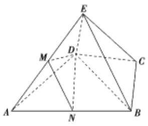
又 $EC\perp BD$，$EC\cap CO=C$，CO，$EC\subset$平面 EOC，

所以 $BD\perp$平面 EOC，因此 $BD\perp EO$.

又 O为 BD的中点，

所以 $BE=DE$.

(2)如图(2)，取 AB 的中点 N，连接 DM，DN，MN.



(2)

因为 M 是 AE 的中点，所以 $MN\parallel BE$.

又 $MN\not\subset$平面 BEC，$BE\subset$平面 BEC，

所以 $MN\parallel$平面 BEC.

又因为$\triangle ABD$为正三角形，

所以$\angle BDN=30°$.

又 $CB=CD$，$\angle BCD=120°$，因此$\angle CBD=30°$.

所以 $DN\parallel BC$.

又 $DN\not\subset$平面 BEC，$BC\subset$平面 BEC，

所以 $DN\parallel$平面 BEC

又 $MN \cap DN = N$，所以平面 DMN // 平面 BEC.

又 $DM \in$ 平面 DMN，所以 DM // 平面 BEC.

对比分析：

1.考查知识点：课本题、2012 山东高考共同考查的知识点是平面与平面平行的判定；2012 山东高考同时考查面面平行的性质、线线垂直、线面垂直的判断与性质．

2．考查的方式：课本题、2012 山东高考都是是解答题．

3．命题的思路：课本题、2012 山东高考共同通过对平面与平面平行的判定与性质的考查，考查学生证明问题能力、转化与划归能力、数形结合能力，同时考查学生对平面与平面平行的判定与性质的掌握情况.

4．进一步挖掘的价值：从近两年高考看，直线与平面，平面与平面平行是高考考查的热点．题型全面，试题难度中等，考查线线、线面、面面平行的相互转化，并且考查空间想象能力以及逻辑思维能力．

三、直线、平面垂直的判定及其性质

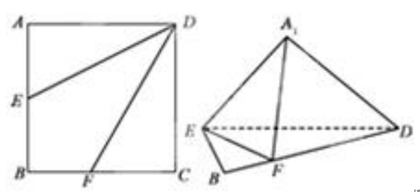
1、直线与平面垂直的判定与性质

【教材原题】课本 79 页复习参考题 B 组 1 题

如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，

（1）点 E 是 AB 的中点，点 F 是 BC 的中点，将 $\triangle AED, \triangle DCF$ 分别沿 DE，DF 折起，使 A，C 两点重合与 A'，求证：$A'D \perp EF$.

(2)当 $BE = BF = \dfrac{1}{4}BC$ 时，求三棱锥 $A' - EFD$ 体积.



（1）证明：由正方形 $ABCD$ 知，$\angle DCF = \angle DAE = 90^\circ$，

则 $A_1D \perp A_1F$，$A_1D \perp A_1E$，且 $A_1E \cap A_1F = A_1$，

所以 $A_1D\perp$平面 A_1EF.

又 $EF\subset$平面 A_1EF，

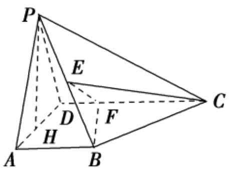
所以 $A_1D\perp EF$.

（2）解：由 $A_1F=A_1E=\frac{1}{2}$，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 及勾股定理，得 $A_1E\perp A_1F$,

所以 $S_{\triangle A_1EF}=\frac{1}{8}$,所以 $V_{A_1-DEF}=V_{D-A_1EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1EF}\cdot A_1D=\frac{1}{24}$.

【高考题或模拟题】

(2012 广东高考)如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\perp$平面 PAD，$AB/\!/CD$，$PD=AD$，E 是 PB 的中点，F 是 DC 上的点且 $DF=\frac{1}{2}AB$，PH 为△PAD 中 AD 边上的高.



(1)证明：$PH\perp$平面 $ABCD$;

(2)若 $PH=1$，$AD=\sqrt{2}$，$FC=1$，求三棱锥 $E-BCF$ 的体积;

(3)证明：$EF\perp$平面 PAB.

【分析】(1)证 $PH\perp AB$，$PH\perp AD$.

(2)连接 BH，取 BH 的中点 G，证明 $EG\perp$平面 $ABCD$，且 $EG=\frac{1}{2}PH$.

(3)取 PA 的中点 M，连接 MD，ME，证明 $MD\perp$平面 PAB，$MD/\!/EF$.

【证明】 (1)因为 $AB\perp$平面 PAD，$PH\in$平面 PAD，

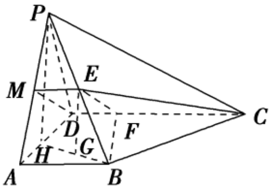
所以 $PH\perp AB$.

因为 PH 为△PAD 中 AD 边上的高，所以 $PH\perp AD$.

因为 $PH\not\in$平面 $ABCD$，$AB\cap AD=A$，AB，$AD\in$平面 $ABCD$，

所以 $PH\perp$平面 $ABCD$.

(2)如图，连接 BH，取 BH 的中点 G，连接 EG.



因为 E 是 PB 的中点，所以 $EG /\!/ PH$，

且 $EG=\frac{1}{2}PH=\frac{1}{2}$.

因为 $PH\perp$平面 $ABCD$，

所以 $EG\perp$平面 $ABCD$.

因为 $AB\perp$平面 PAD，$AD\in$平面 PAD，所以 $AB\perp AD$，所以底面 $ABCD$ 为直角梯形，

所以 $V_{E-BCF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCF}\cdot EG=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot FC\cdot AD\cdot EG=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

(3)取 PA 中点 M，连接 MD，ME.

因为 E 是 PB 的中点，所以 ME 平行且等于$\frac{1}{2}AB$.

又因为 DF 平行且等于$\frac{1}{2}AB$，所以 ME 平行且等于 DF，所以四边形 $MEFD$ 是平行四边形，所以 $EF /\!/ MD$.

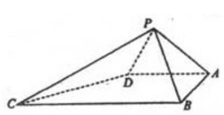
因为 $PD=AD$，所以 $MD\perp PA$.

因为 $AB\perp$平面 PAD，所以 $MD\perp AB$.

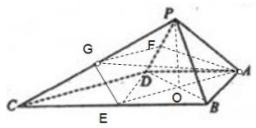
因为 $PA\cap AB=A$，所以 $MD\perp$平面 PAB，所以 $EF\perp$平面 PAB.

(2013·高考全国大纲卷理)如图，四棱锥 $P-ABCD$中，$\angle ABC=\angle BAD=90^{\circ}$，$BC=2AD,\Delta PAB$与$\Delta PAD$都是等边三角形.

（1）证明：$PB\perp CD$;



（2）求二面角$A-PD-C$的大小.



【解析】（1）取BC的中点E，连接DE，则$ABED$为正方形，过P作$PO\perp$平面$ABCD$，垂足为O.连接OA，OB，OD,OE.

由$\triangle PAB$和$\triangle PAD$都是等边三角形知$PA=PB=PD$，

所以$OA=OB=OD$，即点O为正方形$ABED$对角线的交点，

故$OE\perp BD$，从而$PB\perp OE$.

因为O是BD的中点，E是BC的中点，所以$OE// CD$，因此$PB\perp CD$.

（2）解法一：由（1）知$CD\perp PB$，$CD\perp PO$，$PB\cap PC=P$，

故$CD\perp$平面PBD.

又$PD\subset$平面PBD，所以$CD\perp PD$，

取PD的中点F，PC的中点G，连FG，

则$FG//CD$，$FG\perp PD$.

连结AF，由$\triangle APD$为等边三角形可得$AF\perp PD$.

所以$\angle AFG$为二面角$A—PD—C$的平面角.

连结AG，EG，则$EG//PB$.

又$PB\perp AE$，所以$EG\perp AE$.

设 AB=2，则 $AE=2\sqrt{2}$，$EG=\frac{1}{2}PB$=1．

故 $AG=\sqrt{AE^2+EG^2}$=3．

在△APG中，$FG=\frac{1}{2}CD=\sqrt{2}$，$AF=\sqrt{3}$，$AG$=3，

所以$\cos\angle AFG=\frac{FG^2+AF^2-AG^2}{2\times FG\times AF}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$．

因此二面角 A—PD—C的大小为$\pi-\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$．

对比分析：

1.考查知识点：课本题、2012 广东高考、2013 高考全国大纲卷理共同考查的知识点是直线与平面垂直的判定与性质；课本题、2012 广东高考考查线面垂直的判断与性质及三棱锥的体积求法；2013 高考全国大纲卷理考查线面垂直的性质和二面角的求解方法．

2．考查的方式：课本题、2012 广东高考、2013 高考全国大纲卷理都是是解答题．

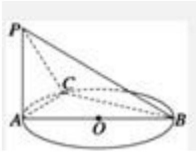
3．命题的思路：课本题、2012 广东高考、2013 高考全国大纲卷理通过考查直线与平面垂直的判定与性质，考查学生对直线和平面垂直的常用方法的掌握情况，考查学生转化与划归能力、空间想象能力和推理论证能力，同时考查学生对线面、面面关系的综合应用情况.

4．进一步挖掘的价值：通过近两年的高考试题看，线线、线面、面面垂直的判定与性质的应用是考查的热点，主要考查空间想象能力和推理论证能力，以及转化与划归能力．题型主要以解答题的形式考查，规范解答至关重要．证明线面垂直的核心是证线线垂直，而证明线线垂直则需借助线面垂直的性质.因此，判定定理与性质定理的合理转化是证明线面垂直的基本思想.

2.面面垂直的判定与性质

【教材原题】课本69页例题3

例3　如图，AB是⊙O的直径，PA垂直于⊙O所在的平面，C是圆周上不同于A、B的任意一点，求证：平面$PAC\perp$平面PBC.



证明　设⊙O所在平面为α，由已知条件，$PA\perp\alpha$，BC在α内，所以$PA\perp BC$.

因为点C是圆周上不同于A、B的任意一点，AB是⊙O的直径，所以$\angle BCA$是直角，即$BC\perp AC$.又因为PA与AC是$\triangle PAC$所在平面内的两条相交直线．所以$BC\perp$平面PAC.又因为BC在平面PBC内，所以，平面$PAC\perp$平面PBC.

【高考题或模拟题】

(2012·浙江高考)设l是直线，α，β是两个不同的平面(　　)

A．若$l\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，则$\alpha\parallel\beta$

B．若$l\parallel\alpha$，$l\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

C．若$\alpha\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则$l\perp\beta$

D．若$\alpha\perp\beta$，$l\parallel\alpha$，则$l\perp\beta$

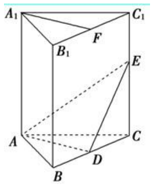
【答案】B

【解析】　设$\alpha\cap\beta=a$，若直线$l\parallel a$，且$l\notin\alpha$，$l\notin\beta$，则$l\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，因此α不一定平行于β，故A错误；由于$l\parallel\alpha$，故在α内存在直线$l'\parallel l$，又因为$l\perp\beta$，所以$l'\perp\beta$，故$\alpha\perp\beta$，所以B正确；若$\alpha\perp\beta$，在β内作交线的垂线l，则$l\perp\alpha$，此时l在平面β内，因此C错误；已知$\alpha\perp\beta$，若$\alpha\cap\beta=a$，$l\parallel a$，且l不在平面α，β内，则$l\parallel\alpha$且$l\parallel\beta$，因此D错误．

(2012 年高考江苏卷)如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=A_1C_1$，D，E 分别是棱 BC，CC_1 上的点(点 D 不同于点 C)，且 $AD\perp DE$，F 为 B_1C_1 的中点．

求证：(1)平面 $ADE\perp$ 平面 BCC_1B_1；

(2)直线 $A_1F\parallel$ 平面 ADE.



[证明]　(1)因为 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC.

又 $AD\subset$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp AD$.

又因为 $AD\perp DE$，CC_1，$DE\subset$ 平面 BCC_1B_1，$CC_1\cap DE=E$，

所以 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1.

又 $AD\subset$ 平面 ADE，

所以平面 $ADE\perp$ 平面 BCC_1B_1.

(2)因为 $A_1B_1=A_1C_1$，F 为 B_1C_1 的中点，

所以 $A_1F\perp B_1C_1$.

因为 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，且 $A_1F\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

所以 $CC_1\perp A_1F$.

又因为 CC_1，$B_1C_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$CC_1\cap B_1C_1=C_1$，

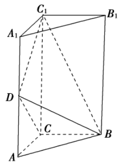
所以 $A_1F\perp$ 平面 BCC_1B_1.

由(1)知 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $A_1F\parallel AD$.

又 $AD\subset$ 平面 ADE，$A_1F\not\subset$ 平面 ADE，

所以 A_1F // 平面 ADE.

(2012 课标全国卷)如图 7－5－3，在三棱柱 $ABC－A_1B_1C_1$ 中，侧棱垂直底面，$\angle ACB＝90°$，$AC＝BC＝\frac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点.



(1)证明：平面 $BDC_1\perp$平面 BDC；

(2)平面 BDC_1 分此棱柱为两部分，求这两部分体积的比．

【分析】 (1)证明 $DC_1\perp$平面 BDC.

(2)先求四棱锥 $B—DACC_1$ 的体积，再求三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的体积．

【解析】(1)由题设知 $BC\perp CC_1$，$BC\perp AC$，$CC_1\cap AC=C$，所以 $BC\perp$平面 ACC_1A_1.

又 $DC_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $DC_1\perp BC$.

由题设知$\angle A_1DC_1=\angle ADC=45°$，所以$\angle CDC_1=90°$，即 $DC_1\perp DC$.

又 $DC\cap BC=C$，所以 $DC_1\perp$平面 BDC.

又 $DC_1\in$平面 BDC_1，故平面 $BDC_1\perp$平面 BDC.

(2)设棱锥 $B-DACC_1$的体积为 V_1，$AC=1$.

由题意得

$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1+2}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

又三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=1$，所以 $(V-V_1)∶V_1=1∶1$.

故平面 BDC_1 分此棱柱所得两部分体积的比为 1∶1.

对比分析：

1.考查知识点：课本题、2012 浙江高考、2012 年高考江苏卷、2012 课标全国卷共同考查的知识点是面面垂直的判定与性质；2012 浙江高考同时考查面面平行、面面垂直、线面垂直的判断与性质；2012 年高考江苏卷同时考查平面与平面平行的判定与性质；2012 课标全国卷同时考查几何体的体积．

2．考查的方式：课本题、2012 年高考江苏卷、2012 课标全国卷都是是解答题；2012 浙江高考是选择题．

3．命题的思路：课本题、2012 山东高考共同通过对面面垂直的判定与性质的考查，考查学生转化与划归能力、空间想象能力和推理论证能力，同时考查学生对线面、面面关系的综合应用情况．

4．进一步挖掘的价值：通过近两年的高考试题看，线线、线面、面面垂直的判定与性质的应用是考查的热点，主要考查空间想象能力和推理论证能力，以及转化与划归能力．题型主要以解答题的形式考查，规范解答至关重要．